Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-274-283
УДК 517.929

К оценке значений линейных функционалов на решениях систем с последействием

Владимир Петрович МАКСИМОВ
ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15

To estimating linear functionals values over solutions of systems with aftereffect

Vladimir P. MAKSIMOV
Perm State National Research University
15 Bukirev St., Perm 614990, Russian Federation

Аннотация. Для широкого класса линейных функционально-дифференциальных систем с последействием предлагается конструктивный метод оценки значений линейных функционалов на решениях в условиях неопределенности внешних возмущений. Метод может применяться для оценки решений краевых задач с произвольным конечным числом краевых условий, а также для получения оценок сверху по включению для множеств достижимости в задачах управления относительно заданного целевого вектор-функционала. Внешние возмущения стеснены только заданной системой линейных неравенств, которые предполагаются выполненными всюду на основном промежутке. Основу метода составляют общие результаты теории функционально-дифференциальных уравнений о разрешимости краевых задач с общими краевыми условиями и представлении решений. Задача оценки значений линейных функционалов сводится к обобщенной проблеме моментов. При этом существенную роль играют результаты о свойствах матрицы Коши линейной системы с последействием. Общий вид используемых функционалов позволяет охватить многие актуальные с точки зрения приложений частные случаи многоточечных и интегральных условий, а также их гибридов.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; системы с последействием; краевые задачи; оценки решений

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332_а).

Для цитирования: *Максимов В.П.* К оценке значений линейных функционалов на решениях систем с последействием // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 274–283. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-274-283.

Abstract. For a wide class of linear functional differential systems with Volterra operators, a constructive technique is proposed to obtain estimates of linear functionals values over solutions in conditions of uncertainty of external perturbations. It can be applied to solutions of boundary value problems with arbitrary number of boundary conditions as well as to description of attainability sets in control problems with respect to given on-target functionals. External perturbations are constrained by a given linear inequalities system on the main time segment. The technique is based on the results of general theory of functional differential equations about the solvability of boundary value problems with general linear boundary conditions and the representation of solutions. The problem under consideration is reduced to the generalized moment problem. Therewith the results on the properties of the Cauchy matrix to systems with aftereffect are of essential importance. The general form of functionals allows one to cover many cases being topical in applications such as multipoint, integral ones, as well as hybrids of those.

Keywords: functional differential equations; systems with aftereffect; boundary value problems; estimating solutions

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00332_a).

For citation: Maksimov V. P. K otsenke znacheniy lineynykh funktsionalov na resheniyakh sistem s posledeystviyem [To estimating linear functionals values over solutions of systems with aftereffect]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 274–283. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-274-283. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Посвящается 70-летию со дня рождения
профессора Александра Ивановича Булгакова

Введение

При изучении краевых задач и задач управления для функционально-дифференциальных уравнений и/или включений часто возникает вопрос об оценке решений в заданных точках или функционалов от решений в условиях неопределенности при задании правых частей (внешних возмущений) [5, 7, 14, 15]. В этой работе мы предлагаем конструктивный подход к получению таких оценок для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений с последействием. Основную идею подхода поясним на примере краевой задачи

$$(\mathcal{L}x)(t) \;=\; f(t),\; t\in[0,T],\;\; \lambda x \;=\; \beta \tag{0.1}$$

с линейными ограниченными операторами $\mathcal{L}$ и λ, действующими из пространства $AC^n[0,T]$ абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to R^n$ в пространства $L^n[0,T]$ суммируемых функций $y:[0,T]\to R^n$ и пространство R^n, соответственно (детальное описание операторов и пространств приводятся ниже). Пусть задача (0.1) однозначно разрешима и

$$x \;=\; Z\beta \;+\; Gf \tag{0.2}$$

— представление ее решения [2]. Рассматривается случай, когда правая часть f неизвестна и информация о ней исчерпывается системой неравенств

$$\Lambda\cdot f(t) \;\le\; \gamma,\;\; t\in[0,T], \tag{0.3}$$

где Λ — постоянная $(N\times n)$-матрица (предполагается, что множество $\mathcal{V}$ всех решений v системы неравенств $\Lambda v\le\gamma$ непусто и ограничено). Требуется дать оценку сверху по включению для значений вектор-функционала $\ell: AC^n\to R^{N_1}$ на решениях (0.2), соответствующих всем возможным f, удовлетворяющим (0.3). Для случая двусторонних покомпонентных ограничений $f(t)$ такая оценка анонсирована в [13]. В общем случае оценка может быть получена после сведения задачи к обобщенной проблеме моментов [8] на основе использования представления (0.2). Упомянутая проблема моментов состоит в описании множества всех значений интеграла $\int_0^T M(t)f(t)\,dt$ на функциях f, удовлетворяющих ограничениям (0.3). Теорема 7.1 [8, p. 269] дает решение задачи в терминах моментной матрицы $M(t)$ и множества $\mathcal{V}$. При этом предполагается решение континуума задач линейного программирования. Мы предлагаем реализуемый алгоритм, применение которого позволяет дать внешнюю оценку (оценку сверху по включению) для упомянутого множества значений вектор-функционала. Отметим, что таким образом возникает возможность для краевых задач с неточно заданными правыми частями и конечным числом линейных краевых условий дать описание правых частей краевых условий, для которых краевая задача заведомо не имеет решений. Напомним в связи с этим некоторые сведения из общей теории краевых задач.

Классическая постановка общей краевой задачи для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \;\; t \in [0,T], \tag{0.4}$$

где $A(t)$ — $(n{\times}n)$-матрица с суммируемыми на $[0,T]$ элементами, предполагает исследование вопроса о существовании решений системы (0.1), удовлетворяющих краевым условиям

$$\lambda x = \beta \tag{0.5}$$

с линейным ограниченным вектор-функционалом $\lambda = col(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, определенным на пространстве абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to R^n$ (см. ниже). Важную роль в постановке (0.4)–(0.5) играет равенство числа линейно независимых компонент λ_i вектор-функционала в (0.5) и размерности системы (0.4). В таком случае однозначная разрешимость краевой задачи при $f = 0, \beta = 0$ гарантирует однозначную всюду разрешимость задачи (0.4)–(0.5). В противном случае мы имеем дело либо с недоопределенной, либо с переопределенной краевой задачей [12]. Линейные краевые задачи для уравнений с обыкновенными производными, которые не обладают свойством всюду однозначной разрешимости, встречаются в различных приложениях, среди таких приложений отметим некоторые задачи экономической динамики [11, 14]. Результаты о разрешимости и представлении решений для таких задач широко используются при исследовании слабо нелинейных краевых задач [6]. Общие результаты о линейных краевых задачах для абстрактного функционально-дифференциального уравнения изложены в [1], для переопределенных краевых задач основные результаты Л. Ф. Рахматуллиной детально представлены в [1, 3, 4]. Отметим еще, что обсуждаемые вопросы близки к вопросу о разрешимости линейных краевых задач с краевыми условиями-неравенствами, конструктивный подход к исследованию которых представлен в [14].

1. Один класс систем с последействием

В этом разделе мы даем описание рассматриваемой системы с последействием. С одной стороны, она является конкретной реализацией абстрактного функционально-дифференциального уравнения, с другой – охватывает широкий класс динамических моделей с последействием, таких как интегро-дифференциальные, с запаздыванием, дифференциально-разностные и др. (см., например, [10, 14]).

Введем функциональные пространства, используемые ниже. Зафиксируем конечный промежуток $[0,T] \subset R$. Обозначим через $L^n = L^n[0,T]$ пространство суммируемых функций $f : [0,T] \to R^n$ с нормой $||f||_{L^n} = \int_0^T |f(t)|\,dt$ ($|\cdot|$ — норма в R^n), $AC^n = AC^n[0,T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to R^n$ с нормой $||x||_{AC^n} = |x(0)| + ||\dot{x}||_{L^n}$.

Рассмотрим функционально-дифференциальную систему

$$\mathcal{L}x \equiv \dot{x} - \mathcal{K}\dot{x} - A(\cdot)x(0) = f, \tag{1.1}$$

где линейный ограниченный оператор $\mathcal{K} : L^n \to L^n$ определен равенством

$$(\mathcal{K}z)(t) = \int_0^t K(t,s)z(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

элементы $k_{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $0 \le s \le t \le T$ и таковы, что $|k_{ij}(t,s)| \le u(t)$, $i,j = 1,...,n$, $u \in L^1[0,T]$, элементы $(n \times n)$-матрицы A суммируемы на $[0,T]$. Ниже мы воспользуемся результатами [2, 9, 10] о представлении решений системы (1.1). Однородная система (1.1) ($f(t) = 0$, $t \in [0,T]$) имеет фундаментальную $(n\times n)$-матрицу $X(t)$:

$$X(t) \ = \ E_n \ + \ Y(t),$$

где E_n — единичная $(n\times n)$-матрица, каждый столбец $y_i(t)$ $(n\times n)$-матрицы $Y(t)$ является единственным решением задачи Коши

$$\dot y(t) = \int_0^t K(t,s)\dot v(s)\;ds \ + \ a_i(t), \ y(0) = 0\ , \ t \in [0,T],$$

где $a_i(t)$ — i-й столбец матрицы A.

Решение системы (1.1) с начальным условием $x(0) = 0$ имеет представление

$$x(t) \ = \ (Cf)(t) \ = \ \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds$$

где $C(t,s)$ — матрица Коши [9] оператора $\mathcal{L}$. Эта матрица может быть определена (и построена) как решение системы

$$\frac{\partial}{\partial t}C(t,s) \ = \ \int_s^t K(t,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}C(\tau,s)\,d\tau \ + \ K(t,s), \ 0 \le s \le t \le T,$$

с условием $C(s,s) = E_n$. Отметим, что для некоторых классов систем (1.1) матрица Коши может быть построена в явном виде [15]. Свойства матрицы Коши, используемые ниже, подробно исследованы в [10].

Матрица $C(t,s)$ выражается в терминах резольвентного ядра $R(t,s)$, соответствующего ядру $K(t,s)$:

$$C(t,s) \ = \ E_n \ + \ \int_s^t R(\tau,s)\,d\tau. \tag{1.2}$$

Общее решение системы (1.1) имеет вид

$$x(t) \ = \ X(t)\alpha \ + \ \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds, \tag{1.3}$$

где $\alpha \in R^n$ — вектор произвольных постоянных.

2. Оценка значений функционалов

Напомним общий вид линейного ограниченного вектор-функционала $\ell : AC^n[0,T] \to R^{N_1}$:

$$\ell x = \int_0^T \Phi(s)\dot x(s)\,ds + \Psi x(0). \tag{2.1}$$

Здесь Ψ — постоянная $(N_1 \times n)$-матрица, Φ — $(N_1 \times n)$-матрица с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,\,T]$ элементами.

Будем оценивать значения ℓx на решениях системы (1.1), удовлетворяющих начальному условию $x(0) = 0$ (в силу линейности задачи это не ограничивает общности, но сокращает выкладки), на множестве правых частей f, удовлетворяющих условию (0.3). Для того, чтобы воспользоваться упомянутой выше Теоремой 7.1 [8, p. 269], следует получить явное представление для $\ell x = \ell C f$ с использованием (2.1). Заметим, что интегральность такого представления следует из общего вида линейного ограниченного вектор-функционала, определенного на пространстве $L^n[0,T]$, однако конструктивное решение поставленной задачи требует явного выражения для элементов моментной матрицы $M(t)$. Сформулируем результат в виде следующей леммы.

Лемма 2.1. *Имеет место представление*

$$\ell C f = \int_0^T M(t)\, f(t)\, dt, \tag{2.2}$$

где $(N_1 \times n)$ *-матрица* $M(t)$ *определяется равенством*

$$M(t) \;=\; \Phi(t) \;+\; \int_t^T \Phi(t)\frac{\partial}{\partial \tau}C(\tau,t)\, d\tau. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\ell C f = \int_0^T \Phi(t)\, \dot{x}(t)\, dt = \int_0^T \Phi(t)\, f(t)\, dt + \int_0^T \Phi(t) \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}C(t,s)\, dt\, f(s)\, ds =$$

$$= \int_0^T \Phi(t)\, f(t)\, dt + \int_0^T \int_s^t \Phi(t)\, \frac{\partial}{\partial t}C(t,s)\, dt\, f(s)\, ds =$$

$$= \int_0^T [\, \Phi(t) \;+\; \int_t^T \Phi(s)\, \frac{\partial}{\partial s}C(s,t)\, ds\,]\, f(t)\, dt.$$

В процессе преобразований обоснованность смены порядка интегрирования в повторных интегралах следует из свойств матрицы Коши, – см. [10, Теорема 2.3, c. 53]. □

Ниже всюду будем предполагать, что элементы матрицы $M(t)$ кусочно непрерывны на $[0,T]$. Отметим, что это условие выполнено для многоточечных и интегральных функционалов, а также для их линейных комбинаций.

Для фиксированного $\mu \in R^{N_1}$ и фиксированного $t \in [0,T]$ определим $w(t,\mu)$ равенством

$$w(t,\mu) \;=\; argmax(\mu' M(t) v : v \in \mathcal{V}) \tag{2.4}$$

($(\cdot)'$ – символ транспонирования). Без ограничения общности будем считать, что равенство (2.4) определяет $w(t,\mu)$ (угловую точку многогранника $\mathcal{V}$) однозначно (в противном случае под $w(t,\mu)$ можно понимать фиксированную выпуклую комбинацию всех угловых точек, доставляющих функционалу $v \to \mu' M(t) v$ одно и то же экстремальное значение). Зафиксируем набор векторов μ_k, $k = 1,\dots,K$. Пусть, далее, упорядоченный набор точек t_j, $j = 0,\dots,J$, $0 = t_0 < t_1 \le \dots \le t_J = T$ состоит из точек непрерывности моментной матрицы $M(t)$ и обладает свойством δ-мажорирования интеграла:

$$\int_0^T \mu_k'\, M(t)\, w(t,\mu_k)\, dt \;\le\; \int_0^T \mu_k'\, M(t) \sum_{j=1}^{J} \chi_{[t_{j-1},t_j)}(t) w(t_j,\mu_k)\, dt \;+\; \delta \;=\; q_k,\;\; k = 1,\dots,K. \tag{2.5}$$

Здесь и ниже $\chi_A(t)$ — характеристическая функция множества A.

Теорема 2.1. *Какой бы ни была суммируемая функция* f, *удовлетворяющая условиям* (0.3) *почти всюду на* $[0, T]$, *для соответствующего решения* x *системы* (1.1) *значения* ℓx *принадлежат многогранному множеству точек* $\rho \in R^{N_1}$, *которое определяется неравенствами*

$$\mu_k' \rho \le q_k, \; k = 1, \ldots, K. \tag{2.6}$$

Доказательство. В силу Теоремы 7.1 [8, p. 269] множество значений интеграла $\int_0^T M(t) f(t)$ на всех f, удовлетворяющих неравенствам (0.3), исчерпывается точками $\rho \in R^{N_1}$, для которых неравенство

$$\mu' \rho \le \int_0^T \mu' \, M(t) \, w(t, \mu) \, dt \tag{2.7}$$

выполняется для всех $\mu \in R^{N_1}$. По определению значений q_k это множество является подмножеством многогранного множества (2.6). □

3. Примеры

Пример 3.1. Рассмотрим двумерную систему с постоянным запаздыванием

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) \; - \; x_2(t-1) & = & f_1(t), \\ \dot{x}_2(t) \; + \; x_2(t) & = & f_2(t), \end{array} \quad t \in [0, 3], \tag{3.1}$$

где $x_2(s) = 0$, если $s < 0$, с начальными условиями

$$x_1(0) = 0, \;\; x_2(0) = 0. \tag{3.2}$$

Информация о правой части системы исчерпывается следующими ограничениями:

$$\begin{array}{c} 0.1 \le f_1(t) \le 0.1, \;\; 0.1 \le f_2(t) \le 0.2, \;\; f_2(t) \ge -2 f_1(t), \; t \in [0, 3]; \\ f_2(t) \ge -2 f_1(t), \;\; f_2(t) \ge 0.1 + f_1(t), \;\; t \in [0, 3]; f_1(t) = 0, \;\; t \in [0, 1]. \end{array} \tag{3.3}$$

Неравенства в (3.3) определяют многоугольник, изображенный на рис. 1.

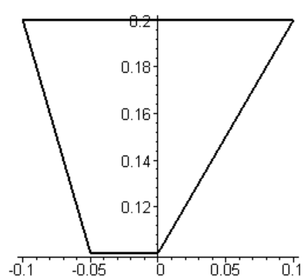

Рис. 1. Ограничения-неравенства на правую часть

Оценим терминальные значения компонент решения задачи (3.1)–(3.2) при произвольной правой части f с условиями (3.3). Таким образом, в данном случае $\ell_1 x \equiv x_1(3)$, $\ell_2 x \equiv x_2(3)$.

Для рассматриваемой системы имеем

$$C(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & \int_s^t \chi_{[1,3]}(\tau) \, \chi_{[0, \tau - 1]}(s) \exp\left(1 - \tau + s\right) d\tau \\ & \\ 0 & \exp(s - t) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Найдем элементы моментной матрицы:

$$\ell_1 x = x_1(3) = \int_0^3 C_{11}(3, t) f_1(t) \, dt \; + \; \int_0^3 C_{12}(3, t) f_2(t) \, dt \; =$$

$$= \int_0^3 \chi_{[2,3]}(t) f_1(t)\,dt \ + \ \int_0^3 \chi_{[0,2]}(t)[1 - exp(t-2)] f_2(t)\,dt;$$

$$\ell_2 x = x_2(3) = \int_0^3 C_{21}(3,t) f_1(t)\,dt \ + \ \int_0^3 C_{22}(3,t) f_2(t)\,dt \ =$$

$$= \ 0 \ + \ \int_0^3 exp(t-3) f_2(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$M_{11}(t) = \chi_{[2,3]}(t),\ M_{12}(t) = \chi_{[0,2]}(t)[1 - exp(t-2)],\ M_{21}(t) = 0,\ M_{22}(t) = exp(t-3).$$

Применяя Теорему 2.1 и реализуя предлагаемый ею алгоритм, основанный на решении $K \cdot J$ задач линейного программирования, при $\mu_j = col(sin(2\pi(j-1)/K), cos(2\pi(j-1)/K))$, $K = 16$, $J = 32$, и выбирая в качестве 0.01-мажорирующего набора точек равномерную сетку с шагом $3/32$, получаем оценку сверху для множества значений $(x_1(3), x_2(3))$. Множество этих значений находится в многоугольнике, показанном на рис. 2. Алгоритм реализован с использованием свободно распространяемой версии системы аналитических вычислений Maple.

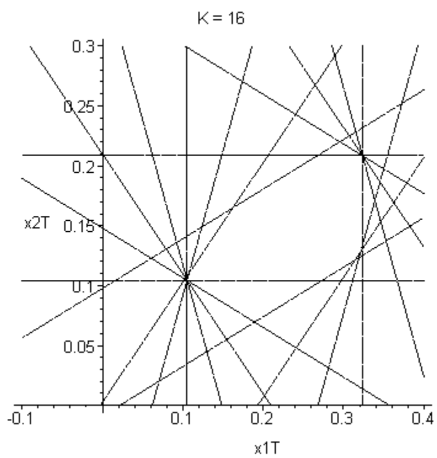

Рис. 2. Оценка множества терминальных значений при $K = 16$

При необходимости эта оценка может быть уточнена, вариант оценки при $K = 32$ показан на рис. 3.

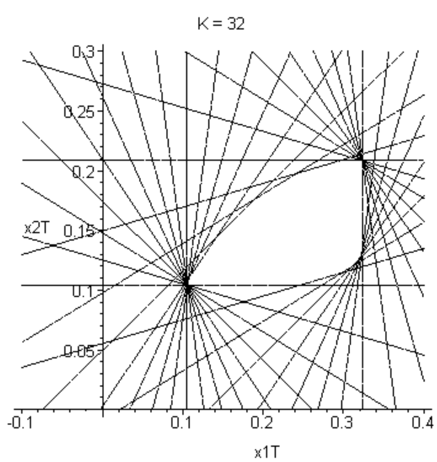

Рис. 3. Оценка множества терминальных значений при $K = 32$

З а м е ч а н и е 3.1. Отметим, что в некоторых случаях предлагаемые оценки позволяют установить положительность значений компонент оцениваемого вектор-функционала в условия отсутствия монотонности операторов или положительности правых частей системы. Так, в рассматриваемом примере компонента $f_1(t)$ может принимать отрицательные значения (см. рис. 1), но терминальные значения обеих компонент решения положительны.

П р и м е р 3.2. В этом примере для задачи (3.1)–(3.2) мы получим оценку значений вектор-функционала ℓ с компонентами

$$\ell_1 x \equiv \int_0^3 t x_1(t)\,dt \;+\; x_2(3), \;\; \ell_2 x \equiv x_1(3) \;+\; \int_0^3 x_2(t)\,dt$$

при следующих ограничениях на правую часть $f(t)$:

$$\begin{gathered} 0.1 \le f_1(t) \le 0.1, \;\; 0.1 \le f_2(t) \le 0.2, \;\; f_2(t) \ge -2f_1(t), \\ f_2(t) \ge 0.1 + f_1(t), \;\; f_1(t) + f_2(t) \le 0.2, \;\; t \in [0,3]. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Многоугольник, определяемый неравенствами (3.5), показан на рис. 4.

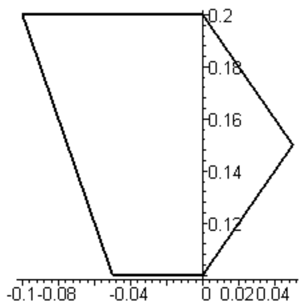

Рис. 4. Ограничения-неравенства на правую часть

Используя матрицу Коши (3.4), после элементарных преобразований получаем для $\ell_1 x$ и $\ell_1 x$:

$$\ell_1 x = \int_0^3 0.5(9-t^2) f_1(t)\,dt \;+\; \int_0^3 \chi_{[0,2]}(t)[0.5(9-t^2) + 4exp(t-2) - t(e+1) + exp(t-3)] f_2(t)\,dt,$$

$$\ell_2 x = \int_0^3 f_1(t)\,dt \;+\; \int_0^3 [\chi_{[0,2]}(t)(1 - exp(t-2)) + exp(t) - exp(t-3)] f_2(t)]\,dt.$$

Эти равенства определяют элементы моментной матрицы $M(t)$:

$$M_{11}(t) = 0.5(9-t^2), \;\; M_{12}(t) = \chi_{[0,2]}(t)[\,0.5(9-t^2) + 4exp(t-2) - (t+1)e + exp(t-3)\,],$$

$$M_{21}(t) = 1, \;\; M_{22}(t) = \chi_{[0,2]}(t)(1 - exp(t-2)) + exp(t) - exp(t-3).$$

Многоугольник, содержащий все возможные значения компонент вектор-функционала $\ell = col(\ell_1, \ell_2)$, показан на рис. 5.

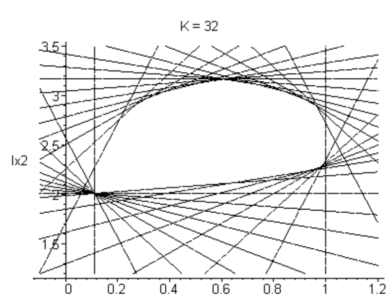

Рис. 5. Оценка значений вектор-функционала

References

[1] N. V. Azbelev, L. F. Rakhmatullina, "Theory of linear abstract functional differential equations and applications", *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, **8** (1996), 1–102.

[2] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov and L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations*, Nauka, Moscow, 1991 (In Russian)].

[3] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Институт компьютерных исследований, М., 2002. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov and L. F. Rakhmatullina, *Elements of the Contemporary Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications*, Institute of Computer-Assisted Studies, Moscow, 2002 (In Russian)].

[4] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov and L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations: Methods and Applications*, Hindawi Publishing Corporation, New York–Cairo, 2007.

[5] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, П. М. Симонов, "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2009, № 1, 3–23; англ. пер.:N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, "Functional differential equations and applications", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **69**:2 (2011), 203–235.

[6] A. A. Boichuk, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наукова думка, Киев, 1990. [A. A. Boichuk, *Constructive Methods of Analysis of Boundary Value Problems*, Naukova Dumka, Kyiv, 1990 (In Russian)].

[7] А. И. Булгаков, В. П. Максимов, "Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами", *Дифференциальные уравнения*, **17**:8 (1981), 1362–1374; англ. пер.:A. I. Bulgakov, V. P. Maksimov, "Functional and functional differential inclusions with Volterra operators", *Differential Equations*, **17**:8 (1981), 881–890.

[8] M. G. Krein, A. A. Nudelman, *The Markov Moment Problem and Extremal Problems*, American Mathematical Society, New York, 1977.

[9] В. П. Максимов, "О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения", *Дифференциальные уравнения*, **13**:4 (1977), 601–606; англ. пер.:V. P. Maksimov, "The Cauchy formula for a functional-differential equation", *Differential Equations*, **13**:4 (1977), 405–409.

[10] В. П. Максимов, *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений*, Изд-во Перм. ун-та, Пермь, 2003. [V. P. Maksimov, *Questions of the General Theory of Functional Differential Equations*, Perm State University, Perm, 2003 (In Russian)].

[11] V. P. Maksimov, "Theory of functional differential equations and some problems in economic dynamics", *Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications*, eds. R. Agarwal, K. Perera, 2006, 757–765.

[12] V. P. Maksimov, "Linear overdetermined boundary value problems in Hilbert space", *Boundary Value Problems*, **140** (2014).

[13] V. P. Maksimov, "On unreachable values of boundary functionals for overdetermined boundary value problems with constraints", *International Workshop QUALITDE – 2018*, International Workshop QUALITDE -2018 (Tbilisi State University, Tbilisi, December 1-3, 2018), Tbilisi State University, Tbilisi, 2018, 127–131.

[14] V. P. Maksimov, A. N. Rumyantsev, "Boundary value problems and problems of pulse control in economic dynamics: constructive study", *Russian Mathematics (Izv. VUZ)*, **37**:5 (1993), 48–62.

[15] В. П. Максимов, "К вопросу о построении и оценках матрицы Коши для систем с последействием", *Труды института математики и механики УрО РАН*, **25**:3 (2019), 153–162. [V. P. Maksimov, "On the construction and estimates of the Cauchy matrix for systems with aftereffect", Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 153–162 (In Russian)].

Информация об авторе

Максимов Владимир Петрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике. Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация. E-mail: maksimov@econ.psu.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0051-3696

Поступила в редакцию 06.07.2020
Поступила после рецензирования 14.08.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Vladimir P. Maksimov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department. Perm State National Research University, Perm, Russian Federation. E-mail: maksimov@econ.psu.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0051-3696

Received 06.07.2020
Reviewed 14.08.2020
Accepted for press 09.09.2020